RÖHRL, H.
Math. Annalen, Bd. 133, S. 1—25 (1957)

Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen

Von

HELMUT RÖHRL in München

Einleitung

1. Ist ein System $\frac{dy_i}{dz} = \sum_1^n R_{ij}(z) y_j$, $i = 1, \ldots, n$, von linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten gegeben, so sind ihre Lösungen bekanntlich im allgemeinen nicht in der vollen Zahlenkugel P^1 eindeutig und meromorph. Jede einzelne Lösung besitzt jedoch nur endlich viele isolierte Singularitäten; als solche Singularitäten kommen in Frage die Polstellen $x_1, \ldots, x_k$ der Koeffizienten $R_{ij}(z)$ und evtl. der Punkt $x_0 = \infty$. Bilden die Lösungen $\mathfrak{y}_i = (y_{1i}(z), \ldots, y_{ni}(z))$, $i = 1, \ldots, n$, ein Fundamentalsystem von Lösungen, so geht bei Umlauf um die singuläre Stelle $x_\varkappa$ der Vektor $\mathfrak{y}_i$ über in einen Vektor $\Sigma a_{ij}^{(\varkappa)} \mathfrak{y}_j$; dabei ist die Matrix $\mathfrak{A}^{(\varkappa)} := (a_{ij}^{(\varkappa)})$ nicht singulär und es besteht die sog. Riemannsche Relation $\mathfrak{A}^{(0)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{A}^{(k)} = 1$. Diese Riemannsche Relation bedeutet nichts anderes, als daß jedes Fundamentalsystem $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ von Lösungen einen Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $P^1 - \{x_0, \ldots, x_k\}$ in die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, C)$ über dem Körper der komplexen Zahlen induziert.

2. Bereits im Jahre 1857 warf B. RIEMANN [21] das Problem auf, ob umgekehrt auch zu jedem Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $P^1 - \{x_0, \ldots, x_k\}$ – $x_0, \ldots, x_k$ seien beliebig vorgegeben – in $GL(n, C)$ ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten gehört, welches ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, das diesen Homomorphismus erzeugt. Darüber hinaus verlangte RIEMANN noch, daß das Differentialgleichungssystem vom Fuchsschen Typ (vgl. Vorbemerkungen) sei. Im selben Jahre [20] hatte er dieses Problem für $k = n = 2$ bejahend beantwortet und Fundamentalsysteme der gewünschten Art explizit angegeben. In der Folgezeit haben sich u. a. H. POINCARÉ [19] und L. SCHLESINGER [23, 24] mit dem Riemannschen Problem eingehend befaßt. Die von ihnen angegebenen Beweise sind jedoch sehr lückenhaft und vom modernen Standpunkt aus nicht exakt. Auf diese Tatsache wies bereits J. PLEMELJ [18] hin, der selbst im Jahr 1908 [17] den ersten im wesentlichen einwandfreien Existenznachweis für beliebiges k und n lieferte. Schon 1900 hatte D. HILBERT das Riemannsche Problem unter seine Mathematischen Probleme [9] aufgenommen (man spricht seither vom Riemann-Hilbertschen Problem); 1905 wurde von D. HILBERT [10, 11] der Fall

$n = 2$, k beliebig erledigt, ein Spezialfall, der kurz vorher auch von O. KELLOG [12] behandelt wurde. Der Plemeljsche Beweis stützt sich — analog wie die Ansätze von D. HILBERT und O. KELLOG — auf die Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen. Im Jahre 1913 gewann G. D. BIRKHOFF [2] das allgemeine Plemeljsche Resultat durch gewisse Approximationssätze; gleichzeitig erledigte er eine bereits früher von ihm angegebene Verallgemeinerung des Riemann-Hilbertschen Problems. In den Jahren um 1924 beschäftigte sich O. HAUPT [6–8] mit einer dem Riemann-Hilbertschen Problem nahe verwandten Fragestellung.

An Monographien, welche sich u. a. ausführlich mit dem Riemann-Hilbertschen Problem befassen, sind die Darstellungen von J. A. LAPPO-DANILEVSKY [14] und N. I. MUSKHELISHVILI [15] zu erwähnen. In [14] wird auch in hinreichender Allgemeinheit die Frage der Abhängigkeit des Fundamentalsystems von den „Verzweigungspunkten" $x_0, \ldots, x_k$ in Angriff genommen.

3. Durch das Resultat von J. PLEMELJ wurde die allgemeine Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Fuchsschen Typ mit rationalen Koeffizienten in einem gewissen Sinne zu einem befriedigenden Abschluß gebracht; denn man überblickte nunmehr das lokale und globale funktionentheoretische Verhalten der Lösungen vollständig. Für Systeme linearer homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Koeffizienten meromorphe Funktionen auf einer beliebigen kompakten oder nicht kompakten Riemannschen Fläche sind, fehlen bis heute analoge Untersuchungen. Die lokale Theorie läuft offensichtlich parallel zum klassischen Fall. Ähnlich wie auf der Zahlenkugel kann man auch jetzt die Singularitätenmenge X' eines Lösungssystems charakterisieren. Jedes Fundamentalsystem von Lösungen erzeugt wieder wie im klassischen Fall einen Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $X - X'$ in $GL(n, C)$. Daher kann man auch das Riemann-Hilbertsche Problem übertragen und schließlich noch nach der Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten fragen. Die Schwierigkeit bei der Behandlung derartiger Fragestellungen beruht im wesentlichen auf der Existenz von nicht zerlegenden Rückkehrschnitten.

4. In der vorliegenden Arbeit wird das allgemeine Riemann-Hilbertsche Problem für beliebige (kompakte oder nicht kompakte) Riemannsche Flächen im bejahenden Sinne gelöst. Die verwendeten Methoden sind im Gegensatz zu den bislang benutzten rein funktionentheoretischer Art. Es werden dabei einige tiefliegende Sätze der modernen Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen sowie die Theorie der komplex-analytischen Faserräume herangezogen. Die Existenzprobleme für Differentialgleichungen werden umformuliert zu Existenzaussagen für komplex-analytische Schnitte in komplexanalytischen Faserräumen (Satz 1 und 2). Das Vorhandensein derartiger Schnitte wird in bestimmten Fällen (Satz 3) durch die Trivialität des definierenden Cozyklus sichergestellt. In den ausstehenden Fällen, die sich auf kompakte Riemannsche Flächen beziehen, wird die Existenz entweder durch direkte Konstruktion nachgewiesen oder durch einen Satz von S. NAKANO über komplex-analytische Vektorraumbündel gewährleistet (Satz 4). Wie man

sich leicht überlegt — dieser Punkt wird im folgenden nicht näher ausgeführt — läßt sich mit Hilfe von Satz 3 und Satz 4 auch die sinngemäß auf beliebige Riemannsche Flächen übertragene Birkhoffsche [2] Verallgemeinerung des Riemann-Hilbertschen Problems im bejahenden Sinne beantworten: dazu hat man nur anstelle des Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}}$ einen entsprechend abgeänderten zu setzen. Bekanntlich leisten die Sätze 3 und 4 noch wesentlich mehr. Satz 3 enthält z. B. den Weierstraßschen Produktsatz für beliebige nicht kompakte Riemannsche Flächen und Matrizen (statt Funktionen), ein Ergebnis, das im Falle der Zahlenebene bereits von G. D. Birkhoff [3] bewiesen wurde. Satz 4 ist noch aus folgendem Grunde von Interesse. Bekanntlich verliert der Weierstraßsche Produktsatz auf kompakten Riemannschen Flächen seine Gültigkeit. Doch bleibt (wegen Satz 4) die Aussage richtig: ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, $x_1, \ldots, x_k$ eine Punktmenge auf X und sind $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ Funktionen, die in geeigneten reduzierten Umgebungen von x_1 bzw. $x_2 \ldots$ bzw. x_k meromorph sind, so gibt es eine auf $X - \{x_1, \ldots, x_k\}$ meromorphe Funktion $f(x)$, für welche $f(x) f_\varkappa^{-1}(x), \varkappa = 1, \ldots, k$, meromorph in $x_\varkappa$ fortsetzbar ist.

Dies ist offensichtlich die sinngemäß auf kompakte Riemannsche Flächen übertragene Formulierung des Weierstraßschen Satzes. Da Satz 4 auch für algebraische Mannigfaltigkeiten seine Gültigkeit behält, gelangt man wie eben zu einer sinngemäßen Übertragung des Cousin-II-Problems auf algebraische Mannigfaltigkeiten; man sieht, daß — im Gegensatz zum Cousin-II-Problem für holomorph vollständige Räume — hier das übertragene Cousin-II-Problem *uneingeschränkt* Lösungen zuläßt.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten wird mit ähnlichen Methoden wie das Riemann-Hilbertsche Problem selbst angegangen. Das Hauptresultat ist: läßt man die Verzweigungspunkte in einfach zusammenhängenden und paarweise fremden Gebieten variieren, so kann man stets Lösungen $\mathfrak{Y}$ des Riemann-Hilbertschen Problems angeben, welche meromorph von den Verzweigungspunkten abhängen. Hinsichtlich der genauen Formulierung sei auf Theorem II verwiesen. Die hier benützten Methoden lassen sich auch bei einer Reihe von Fragestellungen, welche in einer Arbeit von O. Teichmüller [25] über veränderliche Riemannsche Flächen angeschnitten sind, mit Erfolg verwenden. Abschließend möge noch darauf hingewiesen werden, daß ähnliche Problemstellungen, wie sie hier behandelt werden, bei gewissen Existenzfragen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen auftreten.

1. Vorbemerkungen

Gegeben sei eine abstrakte Riemannsche Fläche X, von der wir stets voraussetzen wollen, daß sie zusammenhängend ist. Ferner sei ein System von n linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$d\,\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,\Omega'(x) \tag{1}$$

mit $\Omega'(x)$ als einer Matrix vom Typ (n, n), deren Komponenten auf X

meromorphe Differentialformen vom Grade 1 sind, betrachtet. Wir sagen, (1) ist ein Differentialgleichungssystem auf X. Mit X' wollen wir die Gesamtheit der Pole der Komponenten von $\Omega'(x)$ bezeichnen; entsprechend nennen wir die Vereinigung der Divisoren der Komponenten von $\Omega'(x)$ den Divisor von $\Omega'(x)$.

Bekanntlich gibt es stets nichttriviale Lösungen dieses Differentialgleichungssystems, d. h. Vektoren $\mathfrak{y}(\tilde{x})$, deren Komponenten auf der universellen Überlagerungsfläche $\widetilde{X - X'}$ von $X - X'$ meromorph und nicht alle identisch Null sind und der Gleichung

$$(1') \qquad d\mathfrak{y}(\tilde{x}) = \mathfrak{y}(\tilde{x})\ \psi^*(\Omega'(x))$$

genügen; dabei möge mit ψ die natürliche Abbildung von $\widetilde{X - X'}$ auf $X - X'$ und mit ψ^* der zugehörige Monomorphismus des Körpers (Ringes) der auf $X - X'$ meromorphen Funktionen (Differentialformen) in den Körper (Ring) der auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphen Funktionen (Differentialformen) sein. Die Gesamtheit L der Lösungen von (1) bildet einen Vektorraum über dem Körper C der komplexen Zahlen, dessen Dimension gleich n ist.

Es sei $x_0 \in X - X'$. Wir betrachten jetzt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X - X', x_0)$ von $X - X'$ mit x_0 als Bezugspunkt. Ist $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X - X'}$ mit $\psi(\tilde{x}_0) = x_0$ ein für allemal gegeben, so entsprechen sich die Elemente $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ und die Punkte aus $\{\psi^{-1}(x_0)\}$ gemäß der üblichen Konstruktion der universellen Überlagerungsfläche umkehrbar eindeutig. Der hierbei α zugeordnete Punkt sei mit $\alpha(\tilde{x}_0)$ bezeichnet. Des weiteren möge unter $\mathfrak{y}(\tilde{x})$ im folgenden der zu $\mathfrak{y}$ im Punkte $\tilde{x} \in \widetilde{X - X'}$ gehörende Keim verstanden werden. Wir setzen dann für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$\alpha^* \cdot \mathfrak{y}(\tilde{x}_0) := \mathfrak{y}(\alpha(\tilde{x}_0)).$$

Bekanntlich ist α^* ein C-Automorphismus von L. Da weiter $(\alpha\,\beta)^* = \beta^*\,\alpha^*$ gilt, liefert die Zuordnung $\alpha \to \alpha^*$ einen Anti-Homomorphismus μ_0 von $\pi_1(X - X', x_0)$ in die Automorphismengruppe von L. Fixiert man also eine Basis in L, so entspricht α^* in natürlicher Weise ein Element $\mu(\alpha)$ der Gruppe $GL(n, C)$ der invertierbaren Matrizen vom Typ (n, n) über dem Körper der komplexen Zahlen. $\alpha \to \mu(\alpha)$ ist ersichtlich ein Homomorphismus. Es ist klar, daß bei einer anderen Wahl der Basis die Darstellung $\alpha \to \mu(\alpha)$ durch eine äquivalente zu ersetzen ist. μ_0 wird üblicher Weise als die Monodromie von (1) bezeichnet, X' als die Menge der Verzweigungspunkte.

Man kann nun die Frage stellen, ob es zu jeder Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ ein System (1) auf X gibt, dessen Lösungsraum L nach dem angegebenen Verfahren zu dieser Darstellung μ Anlaß gibt. Dabei werde vorausgesetzt, daß $X' \subset X$ auf X keine Häufungspunkte besitzt und $x_0 \in X - X'$ gilt.

Faßt man eine Basis des Lösungsraumes L von (1) zu einer Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$, deren Zeilen aus den verschiedenen Elementen der Basis bestehen mögen, zusammen, so hat man ersichtlich für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$(2) \qquad \alpha^* \cdot \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha)\, \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0),$$

falls α^* sinngemäß für Matrizen definiert wird. $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ ist auf $\widetilde{X - X'}$ meromorph und nicht singulär, d. h. Det $\mathfrak{Y}(\tilde{x}) \not\equiv 0$. Ist umgekehrt eine auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe und nicht singuläre Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ vom Typ (n, n) gegeben, für welche (2) gilt, dann ist auch $\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, d\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ meromorph. Da für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$\alpha^* \cdot \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}_0)\, d\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}_0)\, d\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

gilt, existiert

$$\psi^{*-1}(\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, d\mathfrak{Y}(\tilde{x})) =: \Omega'(x)\,.$$

$\Omega'(x)$ ist auf $X - X'$ meromorph und die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$d\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,\Omega'(x)$$

auf $X - X'$ geben als Linearkombinationen der Zeilen von $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ zu der gegebenen Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ Anlaß. Da die Zweige von $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ im allgemeinen in den Punkten aus X' ziemlich unangenehme Singularitäten besitzen, kann man nicht erwarten, daß sich $\Omega'(x)$ meromorph auf X fortsetzen läßt.

Erfahrungsgemäß erweisen sich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen die sog. singulären Stellen der Bestimmtheit als angenehme Singularitäten. Dabei möge in leichter Abwandlung der herkömmlichen Begriffsbildung $x' \in X'$ für den auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphen Vektor $\mathfrak{y}(\tilde{x})$ eine *Stelle der Bestimmtheit* heißen, wenn gilt: *es gibt eine Umgebung U von x' in X mit $U \cap X' = \{x'\}$ derart, daß zu jeder zusammenhängenden Komponente V_j von $\psi^{-1}(U - \{x'\})$ eine Matrix $\mathfrak{A}_j$ existiert, so daß für die in U definierte lokale Uniformisierende $t(x)$ von x' mit $t(x') = 0$*

$$\psi_j^{*-1}\{\exp(\mathfrak{A}_j \log t \circ \psi_j(\tilde{x}))\, \mathfrak{y}(\tilde{x})\}$$

existiert und sich meromorph in x' fortsetzen läßt; dabei werde unter ψ_j die Beschränkung von ψ auf V_j verstanden. Diese Definition überträgt sich sinngemäß auf Matrizen.

Ein Differentialgleichungssystem (1) heißt vom *Fuchsschen Typ*, falls für jedes Element des Lösungsraumes L von (1) jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist. Liegt nun in $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eine auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe Matrix vor, für welche jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist und die der Beziehung (2) genügt, so ist, wie man leicht sieht, $\Omega'(x)$ auf ganz X meromorph fortsetzbar.

Das *Riemann-Hilbertsche Problem* besteht darin, zu gegebenem $X' \subset X$ und zur Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ ein System (1) vom Fuchsschen Typ auf X zu konstruieren, dessen Lösungsraum L zu der gegebenen Darstellung μ Anlaß gibt. Nach den obigen Bemerkungen wird es positiv beantwortet sein, wenn es gelingt, eine auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ anzugeben, für die jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist und welche (2) erfüllt. Dieses letztere Existenzproblem sei mit (X, X', μ) bezeichnet. Es wird von einer holomorph invertierbaren Lösung $\mathfrak{Y}(\tilde{x}$

von (X, X', μ) gesprochen, falls $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar ist.

2. Die dem Riemann-Hilbertschen Problem zugeordneten Faserräume

Es ist zweckmäßig, zuerst eine Lösung von $(X - X', \Phi, \mu)$[1] zu suchen und dann in einem weiteren Schritt die eventuellen Stellen der Unbestimmtheit, welche in X' enthalten sind, zu beseitigen. Bei der Diskussion von $(X - X', \Phi, \mu)$ kann $X - X'$ stets als nicht kompakt vorausgesetzt werden. Ist nämlich X kompakt und $X' = \Phi$, so setze man mit $x'' \in X$ $X'' := \{x''\}$ und betrachte $(X - X'', \Phi, \mu^*)$, wobei $\mu^* = \mu \circ i^*$ mit i^* als dem natürlichen Homomorphismus von $\pi_1(X - X'', x_0)$ auf $\pi_1(X - X', x_0)$. Eine Lösung von $(X - X'', \Phi, \mu^*)$ löst dann auch (X, Φ, μ) über $X - X''$, weshalb dann nur noch eine etwaige Singularität in x'' zu beseitigen ist.

Nun sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X durch zusammenhängende Koordinatenumgebungen mit $\pi_1(U_i) = 0$ für $i \in I$, so daß $U_i \cap U_j$ stets zusammenhängend ist. (X, Φ, μ) wird nach dem folgenden Verfahren ein $GL(n, C)$-Cozyklus $\xi_\mu \in H^1(X, GL(n, C)\omega)$ zugeordnet. In jedem U_i wählen wir einen Punkt $x_i \in U_i$ und verbinden x_0 mit x_i durch eine Kurve K_i, welche in x_0 startet. Ist $x \in U_i \cap U_j$, so sei $D_{ij}(x)$ eine Kurve von x_i nach x in U_i, $D_{ji}(x)$ eine Kurve von x_j nach x in U_j. Wir bezeichnen die Homotopieklasse einer Kurve K mit $\langle K \rangle$. Es sei

$$g_{ij}(x) := \mu(\langle K_i D_{ij}(x)\, D_{ji}(x)^{-1} K_j^{-1} \rangle) \quad \text{für} \quad x \in U_i \cap U_j$$

gesetzt. Da $g_{ij}(x)$ wegen $\pi_1(U_i) = \{0\}$ in jeder zusammenhängenden Komponente von $U_i \cap U_j$ konstant ist, stellt $g_{ij}(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_i \cap U_j$ in $GL(n, C)$ dar. Wie man leicht nachrechnet, erfüllen die $g_{ij}(x)$ die Verträglichkeitsbedingungen $g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Der durch die $g_{ij}(x)$ definierte Cozyklus aus $H^1(X, GL(n, C)_\omega)$ werde mit ξ_μ bezeichnet. ξ_μ ist unabhängig von der Wahl der Punkte $x_i \in U_i$ und der Kurven K_i. Ferner sind, wie man sich leicht überlegt, zwei Cozyklen $\xi_\mu, \xi_{\mu'}$ dieser Art genau dann gleich, wenn es einen inneren Automorphismus γ von $GL(n, C)$ mit $\mu' = \gamma \circ \mu$ gibt.

Einer holomorph invertierbaren Lösung $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ von $(X - X', \Phi, \mu)$ wollen wir jetzt einen weiteren Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}}$ zuordnen. Dazu wählen wir eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X mit den nämlichen Eigenschaften wie eben, für welche außerdem noch gilt:

$U_i \cap X'$ ist für jedes $i \in I$ höchstens einpunktig und jedes $x' \in X'$ ist in höchstens einem der U_i enthalten. Ist $U_i \cap X' = \Phi$, so setzen wir

$$f_i(x) := 1 \in GL(n, C) \quad \text{für } x \in U_i\,.$$

Nunmehr sei $U_j \cap X' = \{x_j'\}$, $t_j(x)$ eine lokale Uniformisierende in U_j mit $t_j(x_j') = 0$, K_j eine Kurve von x_0 nach $x_j \in U_j - \{x_j'\}$ und D_j eine in $U_j - \{x_j'\}$ verlaufene Kurve, die in x_j startet und endet und deren Homotopieklasse

[1]) Φ sei die leere Menge.

$\pi_1(U_j - \{x'_j\})$ erzeugt. Dann läßt sich der meromorphe Keim

$$\exp\left\{-\frac{\log\mu(\langle K_j D_j K_j^{-1}\rangle)\log t_j\circ\psi(\langle K_j\rangle\tilde{x}_0)}{\langle D_j\rangle\log t_j(x_j)-\log t_j(x_j)}\right\}\langle K_j\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

meromorph in diejenige zusammenhängende Komponente V_j von $\psi^{-1}(U_j - \{x'_j\})$ fortsetzen, zu welcher der Punkt $\langle K_j\rangle\,\tilde{x}_0$ gehört. Diese Fortsetzung ist mit $D(x)$ als einer in $U_j - \{x'_j\}$ verlaufenden Kurve, die in x_j startet und in x endet,

$$\exp\left\{-\frac{\log\mu(\langle K_j D_j K_j^{-1}\rangle)\log t_j\circ\psi(\langle K_j D_j(x)\rangle\tilde{x}_0)}{\langle D_j\rangle\log t_j(x_j)-\log t_j(x_j)}\right\}\langle K_j\, D_j(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0).$$

Wie man unschwer erkennt, existiert

$$f_j(x) := \psi_j^{*-1}\left(\exp\left\{-\frac{\log\mu(\langle K_j D_j K_j^{-1}\rangle)\log t_j\circ\psi(\langle K_j D_j(x)\rangle\tilde{x}_0)}{\langle D_j\rangle\log t_j(x_j)-\log t_j(x_j)}\right\}\langle K_j D_j(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)\right)$$

für $x \in U_j\{-x'_j\}$. Die Abbildungen

$$g_{ij}(x) := f_i(x)\,f_j(x)^{-1} \qquad \text{für } x \in U_i \cap U_j$$

sind holomorph und erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen, definieren also einen Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}} \in H^1(X, GL(n,C)\,\omega)$. Falls $GL(n,C)$ als komplexe Automorphismengruppe auf dem komplexen Raum Y operiert, läßt sich dem eben konstruierten Cozyklus ein komplex-analytisches Faserbündel $(X, \xi_{\mathfrak{Y}}, Y)$ assoziieren. Wir benötigen hier nur die Fälle $Y = GL(n,C)$, was zum Hauptbündel führt, $Y = P^n$ ($= n$-dimensionaler komplex-projektiver Raum) und $Y = P^{n^2}$. Da $GL(n,C)$ in natürlicher Weise als eine Untergruppe der $PGL(n+1,C)$ aufgefaßt werden kann, ist nur noch anzugeben, wie die $GL(n,C)$ auf P^{n^2} operieren soll. Dazu zeichnen wir einen zu P^{n^2} gehörenden C^{n^2} aus und identifizieren ihn mit der Menge aller n-reihigen Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen; $GL(n,C)$ operiert durch Linksmultiplikation auf der Menge aller Matrizen und damit auf C^{n^2} als eine Gruppe von linearen Automorphismen, welche bekanntlich auf genau eine Weise in den P^{n^2} fortgesetzt werden können.

Satz 1: *X sei nicht kompakt. Dann ist für die Existenz einer holomorph invertierbaren Lösung von (X, Φ, μ) notwendig und hinreichend, daß ξ_μ der triviale Cozyklus ist.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{Y}(x)$ eine holomorph invertierbare Lösung von (X, Φ, μ). Ferner sei ψ_i die Beschränkung von ψ auf diejenige zusammenhängende Komponente V_i von $\psi^{-1}(U_i)$, welche $\langle K_i\rangle\,\tilde{x}_0$ enthält. $\langle K_i\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$ läßt sich zu der auf V_i holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\langle K_i D_i(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(x_0)$ fortsetzen. Da V_i durch ψ_i topologisch auf U_i abgebildet wird, existiert

$$s_i(x) := \psi_i^{*-1}(\langle K_i D_i(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \qquad \text{für } x \in U_i$$

und ist holomorph und holomorph invertierbar. Da für $x \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \psi_i^{*-1}(\langle K_i D_i(x)\,D_j^{-1}(x)\,K_j^{-1}K_j D_j(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \\ &= \psi_i^{*-1}(\langle K_j D_j(x)\rangle^*\langle K_i D_i(x)\,D_j^{-1}(x)\,K_j^{-1}\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \\ &= g_{ij}(x)\,\psi_j^{*-1}(\langle K_j D_j(x)\rangle^*\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) = g_{ij}(x)\,s_j(x) \end{aligned}$$

gilt, bildet die Kollektion der $s_i(x)$ einen komplex-analytischen Schnitt in dem zu ξ_μ gehörenden Hauptbündel. Das bedeutet jedoch, daß ξ_μ der triviale Cozyklus ist.

Nun sei umgekehrt ein komplex-analytischer Schnitt $s(x)$ in dem zu ξ_μ gehörenden Hauptbündel gegeben; ein solcher existiert bekanntlich, falls ξ_μ trivial ist. Die Abbildungen $\varphi_i(x,y)$ von $U_i \times GL(n,C)$ in das zu ξ_μ assoziierte Hauptbündel seien ein System lokaler Koordinaten der Faserstruktur. Dann setzen wir

$$s_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \qquad \text{für } x \in U_i\,.$$

$s_i(x)$ ist in U_i holomorph und holomorph invertierbar und es gilt in $U_i \cap U_j$ die Beziehung $s_i(x)\, s_j^{-1}(x) = g_{ij}(x)$. Ist $x_0 \in U_0$, so wollen wir nun zeigen, daß $s_0(x)$ längs jedes in x_0 startenden und endenden Weges K analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. also zu einer auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphen nichtsingulären Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ Anlaß gibt. Nebenbei wird sich ergeben, daß $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ holomorph und holomorph invertierbar ist und der Gleichung (2) genügt. K läßt sich durch geeignete Wahl der Kurvenpunkte x'_ϱ, $\varrho = 0, \ldots, r+1$, $x_0 = x'_0 = x'_{r+1}$, derart in Teilwege K'_ϱ von x'_ϱ nach $x'_{\varrho+1}$ zerlegen, daß für geeignete Elemente U_ϱ, $\varrho = 0, \ldots, r$, $U_0 = U_r$ der gegebenen Überdeckung von X $K_\varrho \subset U_\varrho$, $\varrho = 0, \ldots, r$, gilt. Weiter werde x_ϱ mit x'_ϱ durch eine Kurve $D_\varrho \subset U_\varrho$ verbunden. Dann gilt

$$K = (K'_0 D_1^{-1} K_1^{-1})\,(K_1 D_1 K'_1 D_2^{-1} K_2^{-1}) \ldots (K_{r-1} D_{r-1} K'_{r-1} K'_r)$$

und somit

$$(\langle K \rangle) = g_{01}(x'_1) \ldots g_{r-1,0}(x'_r)\,. \tag{3}$$

Da $g_{i,i+1}(x)$ in $U_i \cap U_j$ konstant ist, wird $s_i(x)$ durch $g_{i,i+1}(x'_{i+1})\, s_{i+1}(x)$ nach U_{i+1} fortgesetzt. Damit läßt sich $s_0(x)$ längs des ganzen Weges K analytisch fortsetzen und gibt so zu einer auf $\widetilde{X - X'}$ holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ Anlaß. Wegen (3) gilt für $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ ersichtlich die Gleichung (2).

Corollar: Ist X nicht kompakt, so entsprechen sich die holomorph invertierbaren Lösungen von (X, Φ, μ) und die komplex-analytischen Schnitte in dem zu ξ_μ assoziierten Hauptbündel in natürlicher Weise.

Der eben bewiesene Satz liefert ein Kriterium für die Existenz von Matrizen, welche das gewünschte „Verzweigungsverhalten" aufweisen. Unter welchen Umständen es möglich ist, die evtl. auftretenden Stellen der Unbestimmtheit zu beseitigen, lehrt der folgende

Satz 2: *Ist $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von $(X - X', \Phi, \mu)$, so gilt:*

1) *ist X nicht kompakt, so ist für die Existenz einer holomorph invertierbaren Lösung von (X, X', μ) notwendig und hinreichend, daß $\xi_{\mathfrak{Y}}$ der triviale Cozyklus ist,*

2) *ist X kompakt, so ist für die Existenz einer Lösung von (X, X', μ) notwendig und hinreichend, daß das zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierte Bündel $(X, \xi_{\mathfrak{Y}}, P^{n^2})$ mit P^{n^2} als Faser einen komplex analytischen Schnitt $s(x)$ zuläßt, für welchen es wenigstens ein $x \in X$ mit $\varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \in GL(n,C)$ gibt.*

Beweis: 1) Ist $s(x)$ ein komplex-analytischer Schnitt in dem zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierten Hauptbündel, so gilt mit

$$s_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \qquad \text{für} \quad x \in U_i$$

$f_i^{-1}(x)\, s_i(x) = f_j^{-1}(x)\, s_j(x)$ in $U_i \cap U_j$. Also definiert die Kollektion der $f_i^{-1}(x)\, s_i(x)$ eine in $X - X'$ holomorphe und holomorph invertierbare Matrix $\mathfrak{W}(x)$. Setzt man nun $\mathfrak{Z}(\tilde{x}) := \mathfrak{Y}(\tilde{x})\, \psi^*(\mathfrak{W}(x))$, so ist offensichtlich $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar und es gilt für $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ die Beziehung (2). Es bleibt also noch zu zeigen, daß alle Punkte von X' für $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ Stellen der Bestimmtheit sind. Da

$$\begin{aligned}
\langle K_i\rangle^* \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0) &= \langle K_i\rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \cdot \psi^*(\mathfrak{W}(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0)) \\
&= \langle K_i\rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \cdot \psi^*\big(f_i^{-1} s_i(\psi(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0))\big) \\
&= \langle K_i\rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \cdot \psi^*\big(f_i^{-1}(\psi(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0))\big) \cdot \psi^*\big(s_i(\psi(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0))\big) \\
&= \langle K_i\rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)\, \{\langle K_i\rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)\}^{-1} \times \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_1^{-i}\rangle) \log t_i \circ \psi(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0)}{\langle D_i\rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)}\right\} \cdot \psi^*\big(s_i(\psi(\langle K_i\rangle\, \tilde{x}_0))\big)
\end{aligned}$$

erhält man für $\tilde{x} \in V$

$$\exp\left\{-\frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_i^{-1}\rangle)^{i} \log t_i \circ \psi_i(\tilde{x})}{\langle D_i\rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)}\right\} \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = \psi_i^*(s_i \circ \psi(\tilde{x})).$$

Somit gilt

$$\psi_i^{*-1}\left(\exp\left\{-\frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_i^{-1}\rangle) \log t_i \circ \psi_i(\tilde{x})}{\langle D_i\rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)}\right\}\right) \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = s_i(x),$$

d. h. aber, daß in V_i die Forderung der Bestimmtheit erfüllt ist; für die übrigen Komponenten folgt dies unmittelbar aus $\alpha^* \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha)\, \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0)$. Ist umgekehrt $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von (X, X', μ), so ist $\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, \mathfrak{Z}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar. Da für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ $\alpha^* \cdot \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, \mathfrak{Z}(\tilde{x})$ gilt, existiert $\mathfrak{W}(x) := \psi^{*-1}(\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x})\, \mathfrak{Z}(\tilde{x}))$. $\mathfrak{W}(x)$ ist auf $X - X'$ holomorph und holomorph invertierbar. Es ist klar, daß $s_i^*(x) := f_i(x)\, \mathfrak{W}(x)$ in U_i meromorph und in $U_i - U_i \cap X'$ holomorph und holomorph invertierbar ist. Wir suchen nun nach einer auf X meromorphen und auf $X - X'$ holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\mathfrak{V}(x)$, für welche in jedem U_i $s_i^*(x)\,\mathfrak{V}(x)$ holomorph und holomorph invertierbar ist. Dies ist ersichtlich eine Verallgemeinerung des sog. Cousin-II-Problems. In der nämlichen Weise wie dem Cousin-II-Problem läßt sich unserer Fragestellung ein Cozyklus aus $H^1(X, GL(n, C)_\omega)$ zuordnen. Die Schnitte in dem assoziierten Hauptbündel entsprechen — wie im klassischen Fall — den Lösungen dieses verallgemeinerten Cousin-II-Problems. Nach Satz 3 ist aber der definierende Cozyklus trivial, d. h. es gibt eine Matrix $\mathfrak{V}(x)$ mit den gewünschten Eigenschaften. Offensichtlich ist die Kollektion der $s_i(x) := s_i^*(x)\,\mathfrak{V}(x)$, $x \in U_i$, ein komplex-analytischer Schnitt in dem zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierten Hauptbündel.

2) Der Beweis von 1) läßt sich sinngemäß auch auf 2) übertragen.

Corollar: Ist $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von $(X—X', \Phi, \mu)$, so gilt:

1) ist X nicht kompakt, so entsprechen sich die holomorph invertierbaren Lösungen von (X, X', μ) und die komplex-analytischen Schnitte in dem zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierten Hauptbündel in natürlicher Weise,

2) ist X kompakt, so entsprechen sich die Lösungen von (X, X', μ) und die komplex-analytischen Schnitte $s(x)$ in dem zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierten Bündel $(X, \xi_{\mathfrak{Y}}, P^{n^2})$, für welche es ein $x \in X$ mit $\varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \in GL(n,C)$ gibt, in natürlicher Weise.

3. Komplex-analytische Faserräume über nicht kompakten Riemannschen Flächen

Es seien komplex-analytische Faserräume mit einer nicht kompakten Riemannschen Fläche X als Basis und einer komplexen Lieschen Gruppe G als Strukturgruppe betrachtet. Es wird bewiesen, daß alle derartigen komplex-analytischen Faserräume komplex-analytisch trivial sind. Dazu ist zu zeigen:

Satz 3: *Ist X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und G eine komplexe Liesche Gruppe, so besteht $H^1(X,G_\omega)$ nur aus dem trivialen Element.*

Beweis: Ist $\xi \in H^1(X,G)$, so ist zu beweisen, daß in dem zu ξ assoziierten Hauptbündel ein komplex-analytischer Schnitt existiert. Zuerst wird nachgewiesen, daß ein stetiger Schnitt in diesem Hauptbündel existiert. Da es im Hauptbündel aus Dimensionsgründen höchstens zwei-dimensionale nicht triviale Hindernisse gibt, reicht für die Existenz eines stetigen Schnittes der Nachweis hin, daß das zweidimensionale Hindernis verschwindet. Dieses Hindernis ist aber ein Element aus $H^2(X, \pi_1(G))$. Weil aber für eine nicht kompakte Riemannsche Fläche X die zweidimensionale ganzzahlige Homologiegruppe $H_2(X,Z)$ nur aus dem Nullelement besteht, gilt dies nach dem universellen Koeffiziententheorem auch für $H^2(X, \pi_1(G))$. Das zu ξ assoziierte Hauptbündel ist somit topologisch trivial. Weil ferner nach H. BEHNKE-K. STEIN [1] jede nicht kompakte Riemannsche Fläche ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man nach einem Satz von H. GRAUERT [5] von der topologischen Trivialität des vorliegenden Hauptbündels auf die komplex-analytische Trivialität schließen, was gleichbedeutend mit der Aussage von Satz 3 ist. Da für den zitierten Satz von H. GRAUERT noch kein Beweis veröffentlicht wurde, sei es gestattet, Satz 3 in dem für das Riemann-Hilbertsche Problem interessierenden Spezialfall $G = GL(n,C)$ noch einmal zu beweisen. Hierzu benötigen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von RUNGE. Eine entsprechende Verallgemeinerung der hier benötigten Aussage benutzt H. GRAUERT [5] beim Beweis seines zitierten Satzes. Ist $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ eine Matrix über dem Körper der komplexen Zahlen, so sei $\|\mathfrak{A}\| := \left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2\right)^{1/2}$.
Ist $\mathfrak{A}(x) = (a_{ik}(x))$ eine Matrix von auf $B \subset X$ holomorphen Funktionen, so

sei $\|\mathfrak{A}(x)\|_B := \sup\{\|\mathfrak{A}(x)\| : x \in B\}$. Es gelten, bekanntlich die folgenden Rechenregeln:

1) $\|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\| \leqq \|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\|$,
2) $\|\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\| \leqq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{B}\|$,
3) ist $\alpha \in C$, so $\|\alpha\,\mathfrak{A}\| = |\alpha|\,\|\mathfrak{A}\|$,
4) ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$, so
$\|e^{\mathfrak{A}}\,e^{\mathfrak{B}}\,e^{\mathfrak{C}} - 1\| \leqq e^{\|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\| + \|\mathfrak{C}\|} - (1 + \|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\| + \|\mathfrak{C}\|)$.

Die im folgenden verwendete Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes lautet:

Ist $B \subset B' \subset X$, B kompakt in B', B' kompakt in X, B relativ B' einfach zusammenhängend und $\mathfrak{A}(x)$ eine holomorphe Abbildung von B in $GL(n,C)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine holomorphe Abbildung $\mathfrak{A}'(x)$ von B' in $GL(n,C)$ mit $\|\mathfrak{A}'(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \varepsilon$.

Dies besagt, daß $\mathfrak{A}(x)$ durch holomorphe Abbildungen von B' in $GL(n,C)$ im Sinne der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf B approximiert werden kann. Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus einer von H. Behnke-K. Stein [1] bewiesenen Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes zusammen mit einem weiteren Ergebnis dieser Arbeit, welches besagt, daß es auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche stets ein Integral 1. Gattung zu gegebenen Perioden gibt. Aus diesen beiden Sätzen schließt man auch noch: ist $x \in B' - B$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine auf B' holomorphe Funktion $h(x)$, deren Divisor auf B' gleich $\{x\}$ ist und für welche $\|h(x) - 1\|_B < \varepsilon$ gilt. Eine derartige Funktion erhält man wie folgt: man wähle $h_1(x)$ als eine auf B' holomorphe Funktion mit dem Divisor $\{x\}$, gebe ein Integral 1. Gattung $f(x)$ auf B', welches auf B dieselben Integralperioden besitzt wie ein gewisser Zweig von $\log h_1(x)$ und approximiere die in B holomorphe Funktion $\log h_1(x) - f(x)$ durch eine in B' holomorphe Funktion $h_2(x)$, so daß $\|\log h_1(x) - f(x) - h_2(x)\|_B < \eta$ mit $e^\eta - 1 < \varepsilon$ gilt; dann leistet $h(x) := \exp(\log h_1(x) - f(x) - h_2(x))$ das Gewünschte.

Nun sei $\mathfrak{A}(x)$ eine holomorphe Abbildung von B in $GL(n,C)$; ist $\mathfrak{A}(x) = (a_{ik}(x))$, so lassen sich nach H. Behnke-K. Stein [1] in B' holomorphe Funktionen $a_{ik}^{(0)}(x)$ so finden, daß mit $\mathfrak{A}^{(0)}(x) := (a_{ik}^{(0)}(x))$ $\|\mathfrak{A}^{(0)}(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \varepsilon/2$ gilt. Ist ε hinreichend klein, so ist jede in B holomorphe Matrix $\mathfrak{B}(x)$ mit $\|\mathfrak{B}(x) - \mathfrak{A}(x)\| < \varepsilon$ in B holomorph invertierbar. Der Divisor $\mathfrak{D}_0$ von $\operatorname{Det}\mathfrak{A}^{(0)}(x)$ auf B' wird im allgemeinen nicht 0 sein, jedoch keine Primdivisoren aus B enthalten. g sei die Gesamtordnung des Divisors von $\operatorname{Det}\mathfrak{A}^{(0)}(x)$. Ist der Primdivisor $\{x'\}$ in $\mathfrak{D}_0$ enthalten und gilt $a_{i_0 k}^{(0)}(x') = 0$ für $k = 1, \ldots, n$, so wähle man eine auf B' meromorphe Funktion $m_1(x)$, deren Divisor auf B' gleich $-\{x'\}$ ist und welche die Bedingung

$$\|m_1(x) - 1\|_B < \frac{\varepsilon}{2g\,\|\mathfrak{A}^{(0)}(x)\|_B}$$

erfüllt. Dann gilt für $\mathfrak{A}^{(1)}(x) := (a_{ik}^{(1)}(x))$ mit $a_{i_0k}^{(1)}(x) := m_1(x)\, a_{i_0k}^{(0)}(x)$ für $k = 1, \ldots, n$ und $a_{ik}^{(1)}(x) := a_{ik}^{(0)}(x)$ sonst

$$||\mathfrak{A}^{(1)}(x) - \mathfrak{A}(x)||_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2g}\,.$$

Der Divisor $\mathfrak{D}_1$ von Det $\mathfrak{A}^{(1)}(x)$ ist gleich $\mathfrak{D}_0 - \{x'\}$. In entsprechender Weise lassen sich alle Primdivisoren von $\mathfrak{D}_0$ behandeln, welche gemeinsame Nullstelle wenigstens einer Zeile sind. Durch unvollständige Induktion gelangt man somit zu einer in B' holomorphen Matrix $\mathfrak{A}^{(l)}(x)$, für welche jede Zeile in B' den größten gemeinsamen Teiler 1 hat, für die

$$||\mathfrak{A}^{(l)}(x) - \mathfrak{A}(x)||_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon l}{2g}$$

gilt und für welche der Divisor $\mathfrak{D}_l$ von Det $\mathfrak{A}^{(l)}(x)$ auf B' in $\mathfrak{D}_0$ enthalten ist und die Gesamtordnung $g - l$ besitzt. Sei nun $x' \varepsilon \mathfrak{D}_l$. Dann gibt es komplexe Zahlen λ_i, $i = 1, \ldots, n$, mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_{ik}(x') = 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Ist $\lambda_{i_0} \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{A}^{(l+1)}(x) := \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{i_0} & \ldots & \lambda_n \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \lambda_1 m_{l+1}(x), & \ldots, & \lambda_{i_0} m_{l+1}(x), & \ldots, & \lambda_n m_{l+1}(x) \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{A}^{(l)}(x),$$

wobei $m_{l+1}(x)$ eine auf B' meromorphe Funktion mit dem Divisor $\{x'\}$ sein soll, für welche

$$||m_{l+1}(x) - 1||_B < \frac{\varepsilon}{2g\, ||\mathfrak{A}^{(l)}(x)||_B \cdot ||\Lambda||\, \sqrt{|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2}}$$

$$\text{mit } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{i_0} & \ldots & \lambda_n \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

gilt. Es ist dann $\mathfrak{A}^{(l+1)}(x)$ auf B' holomorph und für den Divisor $\mathfrak{D}_{l+1}$ von Det $\mathfrak{A}^{(l+1)}(x)$ gilt $\mathfrak{D}_{l+1} = \mathfrak{D}_l - \{x'\}$, und man hat $||\mathfrak{A}^{(l+1)}(x) - \mathfrak{A}(x)||_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(l+1)}{2g}$. Durch unvollständige Induktion gelangt man schließlich zu einer Matrix $\mathfrak{A}'(x) := \mathfrak{A}^{(g)}(x)$, welche den gestellten Anforderungen genügt.

Dem eigentlichen Beweis sei noch ein Hilfssatz vorausgeschickt, der auch noch beim Beweis von Satz 4 in einer entsprechend abgeänderten Form Verwendung findet.

Hilfssatz 1: Es sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $P \subset X$ sei in X kompakt, ferner sei $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von P, desgleichen sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Überdeckung von P und V_i in U_i, $i = 1, 2$, relativ kompakt. Dann gibt es eine positive Zahl δ, welche nur von der geometrischen Konstellation abhängt und die Eigenschaft besitzt:

Ist $h(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n,C)$ und gilt $\|h(x) - 1\| < \delta$, dann gibt es holomorphe Abbildungen $g_i(x)$ von V_i, $i = 1, 2$, in $GL(n,C)$ mit $g_1(x) = h(x)\, g_2(x)$ für $x \varepsilon V_1 \cap V_2$.
Ein analoges Lemma wurde bereits von H. Cartan [4] angegeben; die dort vorliegende Beweisidee führt auch hier zum Ziel, da man hier stets nach H. Behnke-K. Stein [1] bzw. H. Röhrl [22] bzw. H. Tietz [26] ein Elementardifferential 1. Ordnung in zwei Veränderlichen angeben kann, welches in $(V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$ als Divisor die analytische Menge $\{(x,x)\}$ besitzt. Auf einen ausführlichen Beweis sei hier verzichtet, da der Beweis aus dem später für Hilfssatz 2 gegebenen Beweis durch die angegebene Modifikation hervorgeht. Mit Hilfssatz 1 zeigen wir jetzt, daß die Beschränkung des zu ξ assoziierten Hauptbündels auf eine in X relativ kompakte Teilmenge P stets einen komplex-analytischen Schnitt zuläßt. Zu diesem Zweck denken wir uns einen Atlas der Faserstruktur des Hauptbündels gegeben; die Kartenträger dieses Atlas sind offene Mengen $U_i \times GL(n,C)$. Wir denken uns eine so feine Triangulierung von P gegeben, daß jedes Simplex in wenigstens einem U_i liegt. Die hierbei auftretenden endlich vielen 2-Simplexe seien durchnumeriert. Hat man bereits einen komplex-analytischen Schnitt über der Vereinigung $\bigcup\limits_{\varkappa=1}^{k} S_\varkappa$ der ersten k 2-Simplexe, so kann man eine hinreichend kleine offene Umgebung U dieser Vereinigung als Kartenträger in einem neuen Atlas der Faserstruktur des Hauptbündels erhalten. Ist U' eine hinreichend kleine Umgebung eines 2-Simplexes S_{k+1} von P, so gehört zu unserem Atlas eine Kartentransformation $h(x)$, welche $U \cap U'$ holomorph in $GL(n,C)$ abbildet. Da bei geeigneter Wahl von U' und passender Numerierung der 2-Simplexe²) U' relativ zu einer geeigneten Umgebung von $U \cup U'$ einfach zusammenhängend ist, kann man nach dem Rungeschen Approximationssatz eine holomorphe Abbildung $h_2(x)$ von $U \cup U'$ in $GL(n,C)$ so finden, daß für in U bzw. U' relativ kompakte offene Mengen V bzw. V', welche die bereits behandelte Vereinigung von Simplexen bzw. das neu hinzugenommene Simplex überdecken,

$$\|h_1(x)\, h_2(x) - 1\|_{V \cap V'} < \delta$$

gilt. Dann kann man aber auf $h(x) := h_1(x)\, h_2(x)$ Hilfssatz 1 anwenden und erhält damit einen komplex-analytischen Schnitt im Hauptbündel über $\bigcup\limits_{\varkappa=1}^{k+1} S_\varkappa$. Nach endlich vielen Schritten hat man also einen komplex-analytischen Schnitt über P gewonnen. Dieses Ergebnis wenden wir nun auf eine Folge $((P_n))$ von in X enthaltenen Mengen mit den Eigenschaften

1) P_n ist relativ kompakt in P_{n+1}, $n = 1, 2, \ldots$ gelegen,
2) zu jeder in X relativ kompakten Menge B gibt es ein n mit $B \subset P_n$.
3) P_n ist relativ P_{n+1} einfach zusammenhängend für $n = 1, 2, \ldots$

²) Man hat dabei die 2-Simplexe so durchzunumerieren, daß $\bigcup\limits_{\varkappa=1}^{k} S_\varkappa$ mit S_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, niemals 3 1-Simplexe gemeinsam hat; auf die Möglichkeit einer solchen Numerierung wird in [1a] hingewiesen.

an. Die Existenz derartiger „Ausschöpfungsfolgen" ist bekannt (vgl. H. BEHNKE-K. STEIN [1]). Es sei also $s_n(x)$ ein komplex-analytischer Schnitt über P_n in dem zu ξ assoziierten Hauptbündel. Da für $x \in U_i \cap U_j \cap P_n$

$$\{\varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{i,x}^{-1}(s_{n+1}(x)) = \{\varphi_{j,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{j,x}^{-1}(s_{n+1}(x))$$

gilt — $\{\cdots\}^{-1}$ ist als Inversenbildung in $GL(n,C)$ zu interpretieren —, definiert die Kollektion der $\{\varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{i,x}^{-1}(s_{n+1}(x))$ eine holomorphe Abbildung $f_n(x)$ von P_n in $GL(n,C)$. Weil aber P_n relativ P_{n+1} einfach zusammenhängt, kann man nach dem Rungeschen Approximationssatz holomorphe Abbildungen $h_n(x)$ von P_n in $GL(n,C)$ mit $h_1(x) = 1 \in GL(n,C)$ so finden, daß

$$f(x) := \prod_{n=1}^{\infty} (h_n^{-1}(x)\, f_n(x)\, h_{n+1}(x))$$

im Sinne der kompakten Konvergenz auf X konvergiert. Also ist $f(x)$ eine holomorphe Abbildung von X in $GL(n,C)$. Setzt man schließlich auf P_{n+1}

$$H_{n+1}(x) := h_{n+1}(x) \prod_{m=1}^{\infty} (h_{n+m}^{-1}(x)\, f_{n+m}(x)\, h_{n+m+1}(x)),$$

so ist die Definition

$$\lambda_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x)) \cdot H_n(x) \qquad \text{für } x \in U_i \cap P_n$$

konsistent, und man hat in der Kollektion dieser $\lambda_i(x)$ einen komplex-analytischen Schnitt im Hauptbündel gefunden.

4. Komplex-analytische Faserräume mit einer kompakten Riemannschen Fläche als Basis, $GL(n, C)$ als Strukturgruppe und P^n als Faser

Bei der Untersuchung komplex-analytischer Vektorraumbündel (X, ξ, C^n) ist es vernünftig, die Cohomologiemoduln $H^q(X, \Omega(X, \xi, C^n))$ zu betrachten; dabei werde wie üblich unter $\Omega(X, \xi, C^n)$ die Garbe der lokalen komplex-analytischen Schnitte in (X, ξ, C^n) verstanden. Tritt jedoch an die Stelle von C^n der komplex-projektive Raum P^n als Faser, so ersetzt man zweckmäßigerweise $\Omega(X, \xi, C^n)$ durch eine Garbe $\hat{\Omega}(X, \xi, P^n)$, die wie folgt erklärt wird. Im P^n wird in bestimmter Weise der C^n ausgezeichnet. Sind $z_1, \ldots, z_n$ die Koordinaten im C^n, so kann man $z_0', z_1', \ldots, z_n'$ mit $z_0' z_\nu = z_\nu'$, $\nu = 1, \ldots, n$ als Koordinaten im P^n betrachten. Ist dann $\mathfrak{A} \in GL(n,C)$, so entspricht $\mathfrak{A}$ die durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ charakterisierte Abbildung des P^n. Ist nun ein komplex-analytischer Schnitt $s(x)$ über $U \subset X$ im Faserraum (X, ξ, P^n) gegeben, so kann man die Darstellungen von $s(x)$ in lokalen Koordinaten anschreiben; dabei erhält man in U_i die z_ν' als holomorphe Funktionen. Wir setzen dann $s_i(x) := (z_0'(x), \ldots, z_n'(x))$. Besitzt $s(x)$ in einer Koordinatendarstellung die Eigenschaft, daß $z_0'(x)$ nicht identisch verschwindet, so liegt diese Eigenschaft in jeder Koordinatendarstellung vor. Ein Schnitt von dieser Art sei als nicht entartet bezeichnet. Man überlegt sich leicht, daß die Menge der nicht entarteten Schnitte über U in natürlicher Weise mit der Struktur eines $K(X)$-Moduls versehen ist, falls unter $K(X)$ der Körper der auf X meromorphen

Funktionen verstanden wird. $\hat{\Omega}(X, \xi, P^n)$ sei die Garbe der lokalen komplex-analytischen nicht entarteten Schnitte. Das Ziel dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 4: *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, $K(X)$ der Körper der auf X meromorphen Funktionen und $\xi \in H^1(X, GL(n, C)_\omega)$, so gilt*

$$K(X) - \dim H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n)) = n\,.$$

Beweis: A) Es seien $s^{(1)}, \ldots, s^{(l)} \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$. Nun soll der Rang dieser l Schnitte erklärt werden. Dazu wähle man ein U_i aus und gebe dort die Koordinatendarstellungen $s_i^{(\lambda)}(x) = (z_0'^{(\lambda)}(x), \ldots, z_n'^{(\lambda)}(x))$, $\lambda = 1, \ldots, l$, der vorliegenden Schnitte an. Unter dem Rang der Schnitte $s^{(1)}, \ldots, s^{(l)}$ in U_i sei dann der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{z_1'^{(1)}(x)}{z_0'^{(1)}(x)}, & \ldots, & \dfrac{z_n'^{(1)}(x)}{z_0'^{(1)}(x)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{z_1'^{(l)}(x)}{z_0'^{(l)}(x)}, & \ldots, & \dfrac{z_n'^{(l)}(x)}{z_0'^{(l)}(x)} \end{pmatrix}$$

in U_i verstanden. Wie man leicht nachrechnet, ist der Rang unabhängig von der Wahl von U_i, weshalb man vom Rang der Schnitte $s^{(1)}, \ldots, s^{(l)}$ schlechthin sprechen kann. Nach einiger Zwischenrechnung findet man: $s^{(1)}, \ldots, s^{(l)}$ sind genau dann linear abhängig über $K(X)$, wenn der Rang der Schnitte $s^{(1)}, \ldots, s^{(l)}$ kleiner als l ist. Daraus ergibt sich aber unmittelbar, daß die Dimension von $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$ höchstens n ist. Um nachzuweisen, daß die Dimension gleich n ist, ziehen wir einen Satz von S. Nakano [16] heran, der eine Aussage über komplex-analytische Vektorraumbündel mit einer algebraischen Mannigfaltigkeit als Basis macht. Da X als algebraische Mannigfaltigkeit im P^3 aufgefaßt werden kann, darf man S. Nakanos Theorem 4 anwenden. Aus ihm schließt man: ist $\eta \in H^1(X, GL(1, C)_\omega)$ geeignet gewählt, so existieren in $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \eta \otimes \xi, P^n))$ n Schnitte $t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}$, deren Rang n ist, welche also über $K(X)$ linear unabhängig sind. Da aber für jedes $\zeta \in H^1(X, GL(1, C)_\omega)$ die Dimension von $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^1))$ positiv ist — dies folgt z. B. aus einem Satz von K. Kodaira und D. C. Spencer [13] —, gibt es einen vom Nullschnitt verschiedenen Schnitt $t \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \eta^{-1}, P'))$. Wegen $t \otimes t^{(1)}, \ldots, t \otimes t^{(n)} \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$ hat man nunmehr Schnitte gewonnen, die im gewünschten Cohomologiemodul liegen und über $K(X)$ linear unabhängig sind, weil t nicht der Nullschnitt ist.

B) Der hier angegebene Beweis verwendet starke Hilfsmittel aus der algebraischen Geometrie. Diese lassen sich umgehen, falls man den Spezialfall $X = P^1$ im Auge hat. Es sei gestattet, für $X = P^1$ einen verhältnismäßig elementaren Beweis anzugeben.

Dem eigentlichen Beweis schicken wir voraus

Hilfssatz 2: Es sei $x_1 \in P^1$, $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von P^1 mit $U_1 \subset P^1 - \{x_1\}$, ferner sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Überdeckung von P^1 und V_i relativ kompakt in U_i, $i = 1, 2$. Dann gibt es eine positive Zahl δ, welche nur von der geometrischen Konstellation abhängt und die Eigenschaft besitzt:

Ist $f(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$ und gilt $\|f(x) - 1\| < \delta$, dann gibt es holomorphe Abbildungen $g_i(x)$ von V_i, $i = 1, 2$, in $GL(n, C)$ mit $g_1(x) = f(x)\, g_2(x)$.

Beweis des Hilfssatzes: Es kann angenommen werden, daß U_2 durch $t(x)$ mit $t(x_1) = 0$ konform auf den Einheitskreis abgebildet ist. Ferner kann noch verlangt werden, daß die Ränder der U_i und V_i glatte Kurven sind. Nun wählen wir eine positive Zahl a mit

$$a < \mathrm{Min}\,[\mathrm{Dist}(\{t : |t| < 1\},\, t(\mathrm{Rd}\, V_1)),\, \mathrm{Dist}(t(\mathrm{Rd}\, U_2),\, t(\mathrm{Rd}\, V_2))]\,,$$

wobei $\mathrm{Dist}(x, y)$ die euklidische Distanz von x, $y \in C$ sein möge. Unter $V_{i,k}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, verstehen wir dann diejenigen Gebiete auf X, für welche $t(\mathrm{Rd}\, V_{i,k})$ eine Parallelkurve zu $t(\mathrm{Rd}\, U_i)$ im Abstand $a - 2^{-k} a$ ist und die relativ kompakt in U_i liegen. Wir wählen weiter $x_2 \in X - U_2$. Ist $dF_{x_1}(x, z)$ ein Elementardifferential 1. Ordnung und zweier Veränderlicher wie in [22] oder bei H. TIETZ [26], dessen Charakterisierungsdivisoren nur den Primdivisor $\{x_1\}$ enthalten, so gibt es, wie man leicht einsieht, eine Zahl K mit

$$\int\limits_{\mathrm{Rd}\, V_{1,k}} |dF_{x_1}(z, x)| \leqq \frac{2\pi K}{a} \cdot 2^{k-1} \qquad \text{für} \quad x \in V_{1,k+1}$$

$$\int\limits_{\mathrm{Rd}\, V_{2,k}} |dF_{x_1}(z, x)| \leqq \frac{2\pi K}{a} \cdot 2^{k-1} \qquad \text{für} \quad x \in V_{2,k+1}$$

und alle $k = 1, 2, \ldots$. Es wird behauptet, daß $\delta := \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{K}{a}\right)^{-2} e^{-\frac{K}{a}}\right)$ die Aussage des Hilfssatzes sicherstellt. Um dies zu beweisen, setzen wir $f_0(x) := f(x)$ für $x \in V_{1,0} \cap V_{2,0}$. Ist bereits $f_k(x)$ als holomorphe Abbildung von $V_{1,k} \cap V_{2,k}$ in $GL(n, C)$ definiert und $\|f_k(x) - 1\|_{V_{1,k} \cap V_{2,k}} < 1$, dann werde in $V_{1,k} \cap V_{2,k}$

$$h_k(x) := -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} (f_k(x) - 1)^m$$

$$h_{1,k}(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Rd}\, V_{1,k}} h_k(z)\, dF_{x_1}(z, x)$$

$$h_{2,k}(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\mathrm{Rd}\, V_{2,k}} h_k(z)\, dF_{x_1}(z, x)$$

gesetzt. Damit wird $h_{1,k}(x) + h_k(x) + h_{2,k}(x) = 0$, und es gelten die Abschätzungen

$$\|h_k(x)\|_{V_{1,k} \cap V_{2,k}} \leqq \frac{\delta}{4^k}$$

$$\|h_{1,k}(x) - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} \leqq \frac{K}{a} \cdot \frac{\delta}{2^k}\,, \quad \|h_{2,k} - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} \leqq \frac{K}{a} \cdot \frac{\delta}{2^k}\,,$$

wie man nach einiger Zwischenrechnung findet. Endlich definiert man noch

$$f_{k+1}(x) := \exp(h_{1,k}(x)) \cdot f_k(x) \cdot \exp(h_{2,k}(x)) \text{ für } x \in V_{1,k+1}\, V_{2,k+1}$$

und gewinnt die Beziehung

$$\|f_{k+1}(x) - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} \leqq \frac{\delta}{4^{k+1}}.$$

Da

$$f(x) = \exp(-h_{1,0}(x)) \ldots \exp(-h_{1,k}(x))\, f_{k+1}(x) \cdot \exp(-h_{2,k}(x)) \ldots \exp(-h_{2,0}(x))$$

für $x \in V_1 \cap V_2$ gilt und dort die Folge der $f_k(x)$ gleichmäßig gegen 1 konvergiert und wegen der obigen Abschätzung auch noch die Produkte $\prod_{k=0}^{\infty} \exp(-h_{1,k}(x))$ gleichmäßig in V_i konvergieren, ist der Beweis des Hilfssatzes erbracht. — Dieser Beweis ist, wie bereits früher erwähnt, einem Beweis von H. CARTAN [4] nachgebildet.

Nun zum Beweis von Satz 4 für den Fall $X = P^1$. Wir geben uns als Überdeckung von X ein System $U_1 \subset X - \{x_1\}$, U_2 von offenen Mengen vor. $U_1 \cap U_2$ sei vom Typ des Kreisringes. Nach Satz 3 ist die Beschränkung des Cozyklus ξ auf U_1 wie auf U_2 der triviale Cozyklus. Damit läßt sich (X, ξ, P^n) durch eine holomorphe Abbildung $g(x)$ von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$ definieren. Der Satz wird also bewiesen sein, wenn man eine offene Überdeckung $\{V_1, V_2\}$ von X mit $V_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, und nicht singuläre, in V_i meromorphe Matrizen $m_i(x)$ mit $m_1(x) = g(x)\, m_2(x)$, $x \in V_1 \cap V_2$, angegeben hat. Erfüllt $g(x)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 2, so ist man bereits fertig. Andernfalls gebe man sich zwei offene, in U_i relativ kompakte Teilmengen W_i, $i = 1, 2$ mit $W_1 \cup W_2 = X$ vor, in denen jeweils V_i relativ kompakt liegt. Weiter kann man eine Matrix $m(x)$ so finden, daß $g^{-1}(x) - m(x)$ in $W_1 \cap W_2$ meromorph und meromorph invertierbar und $\|m(x)\|_{W_1 \cap W_2} < \dfrac{\varepsilon}{\|g(x)\|_{W_1 \cap W_2}}$ ist. Wählt man ε hinreichend klein, so ist $f(x) := g(x)\,(g(x)^{-1} - m(x))$ eine holomorphe Abbildung von $W_1 \cap W_2$, welche die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Alsdann hat man in $m_1(x) := g_1(x)$, $m_2(x) := (g(x)^{-1} - m(x))\, g_2(x)$ Matrizen der gewünschten Art gefunden.

Corollar (Heftungslemma): Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X und $h(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$, so gibt es auf U_i meromorphe und nichtsinguläre Matrizen $m_i(x)$, $i = 1, 2$, für welche in $U_1 \cap U_2$

$$m_1(x) = m_2(x)\, h(x)$$

gilt.

Wie man sich leicht überlegt, ist dieses Corollar nur eine andere Formulierung von Satz 4.

Die Sätze 1—4, zusammen mit den ersten Bemerkungen des Beweises von Satz 4, ergeben

Theorem I: *Ist X eine Riemannsche Fläche, $X' \subset X$ eine Teilmenge von X ohne Häufungspunkte auf X und μ ein Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$, so gibt es stets eine auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe und nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$, welche über X' nur Stellen der Bestimmtheit besitzt und für jedes*

$\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ *der Bedingung*

$$\alpha \cdot \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha)\,\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

genügt.

5. Die Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten

Im folgenden soll untersucht werden, in welcher Weise die Verzweigungspunkte in die nach Theorem I existierenden Matrizen $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eingehen. Als erstes möge diese Fragestellung präzisiert werden. Wir denken uns hierzu ein System $\{x'_1, \ldots, x'_k\} \subset X'$ von endlich vielen Verzweigungspunkten gegeben. Jedem $x'_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, ordnen wir eine offene Umgebung $U'_\varkappa$ von $x'_\varkappa$ auf X zu. $U'_\varkappa$ soll der „Variabilitätsbereich" für $x'_\varkappa$ werden, soweit dies überhaupt sinnvoll ist; die Monodromie μ soll jedoch „unabhängig" von der Wahl von $x_\varkappa \in U'_\varkappa$ sein. Falls zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen, wird man mit gewissen „Entartungen" rechnen müssen. Deshalb wollen wir uns darauf beschränken, die Verzweigungspunkte jeweils nur so variieren zu lassen, daß keine zwei von ihnen zusammenfallen. Zu diesem Zwecke verlangen wir, daß stets $U'_\varkappa \cap (X' - \{x'_1, \ldots, x'_k\})$ leer ist. Darüber hinaus kommen für die Betrachtung nur und genau die k-tupel aus $U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta$ in Frage, wenn mit Δ die Menge derjenigen k-tupel aus $U'_1 \times \cdots \times U'_k$ bezeichnet wird, für welche wenigstens zwei Komponenten übereinstimmen. Setzen wir nun für $(x^*_1, \ldots, x^*_k) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta$

$$X'_{x^*_1, \ldots, x^*_k} := (X' - \{x'_1, \ldots, x'_k\}) \cup \{x^*_1, \ldots, x^*_k\}$$

und ist der Punkt x_0 in $X - (X' \cup U'_1 \cup \cdots \cup U'_k)$ gewählt, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\iota_{x^*_1, \ldots, x^*_k}$ von $\pi_1(X - X'_{x^*_1, \ldots, x^*_k}, x_0)$ auf $\pi_1(X - - X', x_0)$. Ferner werde für $X \times (U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta)$ kürzer $X_{\mathfrak{U}}$ und für $(X' - \{x'_1, \ldots, x'_k\}) \times (U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta) \cup \Delta'$ entsprechend $X'_{\mathfrak{U}}$ mit $\Delta' := \bigcup_{\varkappa=1}^{k} \{\bigcup \{(x^*_\varkappa, x^*_1, \ldots, x^*_k) : (x^*_1, \ldots, x^*_k) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta\}\}$ geschrieben.
Nun ordnen wir jedem $(x^*_1, \ldots, x^*_k) \in U'_1 \times \ldots \times U'_k - \Delta$ das Problem $(X, X'_{x^*_1, \ldots, x^*_k}, \iota_{x^*_1, \ldots, x^*_k} \circ \mu)$ zu und fragen nach nicht singulären, auf dem universellen Überlagerungsraum $\widetilde{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ meromorphen Matrizen $\mathfrak{Y}$, welche die folgende Eigenschaft besitzen:

Ist χ die natürliche Abbildung von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ auf $U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta$, ψ die natürliche Projektion von $\widetilde{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ auf $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ und für

$$(x^*_1, \ldots, x^*_k) \in U'_1 \times \ldots \times U'_k - \Delta$$

$\varphi_{x^*_1, \ldots, x^*_k}$ die natürliche Projektion von $\widetilde{X - X'_{x^*_1, \ldots, x^*_k}}$ auf eine geeignete zusammenhängende Komponente $Z_{x^*_1, \ldots, x^*_k}$ von $(\chi \circ \psi)^{-1}(x^*_1, \ldots, x^*_k)$, so gilt für die Beschränkung $\mathfrak{Y}|Z_{x^*_1, \ldots, x^*_k}$ von $\mathfrak{Y}$ auf $Z_{x^*_1, \ldots, x^*_k}$:
Für jedes $(x^*_1, \ldots, x^*_k) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta$ ist $\varphi^*_{x^*_1, \ldots, x^*_k}(\mathfrak{Y}|Z_{x^*_1, \ldots, x^*_k})$ eine Lösung von $(X, X'_{x^*_1, \ldots, x^*_k}, \iota_{x^*_1, \ldots, x^*_k} \circ \mu)$.

Dies eben formulierte Problem werde mit $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ bezeichnet. Entsprechend wie früher heißt eine Lösung $\mathfrak{Y}$ von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ holomorph, wenn die Matrix $\mathfrak{Y}$ holomorph invertierbar ist.

Der natürliche Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $\pi_1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, (x_0, x'_1, \ldots, x'_k))$ sei mit j bezeichnet. Offensichtlich ist notwendig für die Lösbarkeit von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$

$$j^{-1}(0) \subset \mu^{-1}(0)\,. \tag{4}$$

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, falls $j^{-1}(0) = 0$ gilt. Das letztere ist gleichbedeutend damit, daß für alle $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k - \Delta$ eine — und damit jede — zusammenhängende Komponente von $(\chi \circ \psi)^{-1}(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ in natürlicher Weise universelle Überlagerung von $X - X'_{x_1^*, \ldots, x_k^*}$ ist. $j^{-1}(0) = 0$ findet statt, wenn die $U'_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, einfach zusammenhängend und paarweise fremd sind: dann ist $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ homöomorph zu $(X - X') \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$; in diesem Falle ist j sogar ein Isomorphismus auf $\pi_1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, (x_0, x'_1, \ldots, x'_k))$.

Es soll jetzt $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ nur noch für den eben angegebenen Fall behandelt werden. Wie beim Riemann-Hilbertschen Problem spalten wir $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ in zwei Teilfragen auf. Zuerst suchen wir eine nichtsinguläre, auf $\widetilde{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ meromorphe Matrix $\mathfrak{Y}$, welche die Eigenschaft besitzt:

$$\begin{array}{l} \text{für jedes } (x_1^*, \ldots, x_k^*) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k \text{ ist } \mathfrak{Y}|Z_{x_1^*, \ldots, x_k^*} \\ \text{eine Lösung von } (X - X'_{x_1^*, \ldots, x_k^*}, \Phi, \iota_{x_1^*, \ldots, x_k^*} \circ \mu)\,. \end{array} \tag{5}$$

In einem weiteren Schritt werden die evtl. vorhandenen Stellen der Unbestimmtheit zu Stellen der Bestimmtheit gemacht.

Wie man sofort sieht, ist die Konstruktion des Cozyklus $\xi_\mu \in H^1(X, GL(n, C)_\omega)$ unabhängig davon, daß die Basis X eine Riemannsche Fläche ist. Die angegebene Konstruktion läßt sich genau wie früher für komplexe Mannigfaltigkeiten durchführen. Somit können wir mit den obigen Bezeichnungen den Cozyklus $\xi_{\mu \circ j^{-1}} \in H^1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, GL(n, C)_\omega)$ als definiert ansehen. Da $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ zu $(X - X') \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$ homöomorph ist, kann $\xi_{\mu \circ j^{-1}}$ zu einer offenen Überdeckung von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ gewählt werden, deren Elemente einfach zusammenhängend und deren paarweise Durchschnitte ebenfalls einfach zusammenhängend und zusammenhängend sind. Damit läßt sich aber der Beweis von Satz 1 übertragen. So gelangt man zu

Satz 5: *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer auf* $\widetilde{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ *holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix* $\mathfrak{Y}$ *mit der Eigenschaft* (5) *ist die Trivialität des Cozyklus* $\xi_{\mu \circ j^{-1}}$.

Ist nun eine auf $\widetilde{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ holomorphe und holomorph invertierbare Matrix $\mathfrak{Y}$, welche (5) genügt, gefunden, so suchen wir wieder nach dem früher angegebenen Verfahren den Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}} \in H^1(X_{\mathfrak{U}}, GL(n, C)_\omega)$ zu konstruieren. Hierzu ist der Begriff der Stelle der Bestimmtheit ebenso zu formulieren wie in 1., wobei jedoch anstelle der lokalen Uniformisierenden $t(x)$ hier eine in einer vollen Umgebung U des betreffenden Punktes holomorphe Funktion zu wählen ist, deren genaues Nullstellengebilde in U mit $X'_{\mathfrak{U}} \cap U$ zusammenfällt. Um $\xi_{\mathfrak{Y}}$ wirklich zu konstruieren, müssen wir von einer geeigneten offenen Überdeckung von $X_{\mathfrak{U}}$ ausgehen: dazu wählen wir eine offene Überdeckung von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ und nehmen zu ihr die Mengen $U'_{\varkappa} \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$, $\varkappa = 1, 2, \ldots$, hinzu, wobei die $U'_{\varkappa}, \varkappa = 1, 2, \ldots$, offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Koordinatenumgebungen mit $X' \subset \bigcup_k U'_k$ sind. Für die so gegebene offene Überdeckung von $X_{\mathfrak{U}}$ lassen sich wie in 2. die g_{ij} konstruieren, wobei man die früher verwendeten lokalen Uniformisierenden $t_{\varkappa}(x)$ durch eine in $U'_{\varkappa} \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$ holomorphe Funktion zu ersetzen hat, deren genaues Nullstellengebilde in $U'_{\varkappa} \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$ mit $X'_{\mathfrak{U}} \cap (U'_{\varkappa} \times U'_1 \times \cdots \times U'_k)$ übereinstimmt. Man zeigt dann leicht, daß die g_{ij} holomorphe Abbildungen in $GL(n,C)$ darstellen und somit einen Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}} \in H^1(X_{\mathfrak{U}}, GL(n,C)_{\omega})$ definieren. Wie vordem beweist man nun

Satz 6: *Ist $\mathfrak{Y}$ wie in Satz 5 bestimmt, so gilt:*

1) *ist X nicht kompakt, so ist für die Existenz einer holomorphen Lösung von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ notwendig und hinreichend, daß der Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}}$ trivial ist;*

2) *ist X kompakt, so ist für die Existenz einer Lösung von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ notwendig und hinreichend, daß das zu $\xi_{\mathfrak{Y}}$ assoziierte Bündel $(X_{\mathfrak{U}}, \xi_{\mathfrak{Y}}, P^{n^2})$ einen komplex-analytischen Schnitt $s(u)$ zuläßt, für welchen der Träger des Divisors von $s(u)$ keine der analytischen Mengen $X \times x_1^* \times \cdots \times x_k^*$, $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k$ enthält.*

Dabei werden sinngemäß unter dem Träger des Divisors von $s(u)$ die Mengen aller $\bar{u} \in X_{\mathfrak{U}}$ mit $\varphi_{i,u}^{-1}(s(u)) \notin GL(n,C)$ verstanden.

Weiter bestätigt man noch leicht, daß das Corollar zu Satz 2 auch jetzt noch seine Gültigkeit behält, wenn nur X nicht kompakt ist.

Im Hinblick auf Satz 5 und 6 wird von Interesse

Satz 7: *Ist X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und G eine komplexe Liesche Gruppe, so besteht $H^1(X_{\mathfrak{U}}, G_{\omega})$ nur aus dem trivialen Element. Ist Y eine beliebige Riemannsche Fläche und Y' eine Teilmenge von Y, welche auf Y keinen Häufungspunkt besitzt, so besteht $H^1(Y_{\mathfrak{U}} - Y'_{\mathfrak{U}}, G_{\omega})$ nur aus dem trivialen Element.*

Beweis: In den angegebenen Fällen ist $X_{\mathfrak{U}}$ bzw. $Y_{\mathfrak{U}} - Y'_{\mathfrak{U}}$ homöomorph dem Produkt aus einer nicht kompakten Riemannschen Fläche und dem Produkt $U'_1 \times \cdots \times U'_k$. Da die ganzzahligen Homologiegruppen der Faktoren sämtlich torsionsfrei sind, gilt dies nach einem bekannten Satz auch für $X_{\mathfrak{U}}$ und $Y'_{\mathfrak{U}} - Y'_{\mathfrak{U}}$. Die ganzzahligen Homologiegruppen dieser Räume lassen sich also vollständig durch ihre Betti-Zahlen charakterisieren. Somit errechnet man nach der Künnethschen Formel leicht

$$H_q(X_{\mathfrak{U}}) = H_q(Y_{\mathfrak{U}} - Y'_{\mathfrak{U}}) = 0 \quad \text{für } q > 1.$$

Damit läßt sich aber der erste Beweis von Satz 3 übertragen. Es sei darauf hingewiesen, daß auch die zweite Beweismethode von Satz 3 hier zum Ziele führt, falls man als Liesche Gruppe G wie früher die Gruppe $GL(n,C)$ zugrunde legt.

Mit Satz 7 ist also bereits bewiesen, daß für nicht kompakte Riemannsche Flächen X das Problem $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ stets holomorph gelöst werden kann. Das besagt, daß man in diesem Fall die Abhängigkeit der Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von den Verzweigungspunkten im kleinen als holomorph voraussetzen kann.

Abschließend benötigt man also noch:

Satz 8: *Es seien X eine kompakte* RIEMANN*sche Fläche und $U'_1, \ldots, U'_k$ zusammenhängende, einfach zusammenhängende und paarweise fremde Teilgebiete von X. Ist dann $\xi \in H^1(X \times U'_1 \times \cdots \times U'_k, GL(n,C)_\omega)$, so besitzt das zu ξ assoziierte Faserbündel $(X \times U'_1 \times \cdots \times U'_k, \xi, P^{n^2})$ einen komplex analytischen Schnitt s, für welchen der Träger des Divisors von s keine der analytischen Mengen $X \times \{x_1\} \times \cdots \times \{x_k\}$ mit $(x_1, \ldots, x_k) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k$ enthält.*

Beweis: Hat X das Geschlecht 0, so läßt sich die Beweisidee B) von Satz 4 auch hier anwenden; die früher angestellten Betrachtungen führen dann zu Satz 8. Die Details seien dem Leser überlassen. Im allgemeinen Fall kann man wie folgt vorgehen (vgl. S. NAKANO [16]). Wir bezeichnen der Kürze halber $U'_1 \times \cdots \times U'_k$ mit U. ξ definiert dann ein komplex analytisches Vektorraumbündel $(X \times U, \xi, C^n)$. Nun sei $x_* \in X$. Dann ist $B := \{x_*\} \times U$ eine irreduzible, rein k-dimensionale analytische Menge in $X \times U$. Der zu B gehörende Divisor bestimmt in natürlicher Weise ein Element $\beta \in H^1(X \times U, GL(1, C)_\omega)$. Dann gilt:

$$0 \to \Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n) \xrightarrow{\iota} \Omega(X \times U, \xi, C^n) \xrightarrow{\varrho} \Omega(\{x_*\} \times U, \xi \mid \{x_*\} \times U, C^n) \to 0$$

ist eine exakte Folge von Garben; dabei ist ι die Injektion und ϱ die Beschränkungsabbildung, $\xi \mid \{x_*\} \times U$ die Beschränkung von ξ auf $\{x_*\} \times U$. Also ist auch die Folge

$$H^0(\Omega(X \times U, \xi, C^n)) \xrightarrow{\iota} H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi(\{x_*\} \times U, C^n)) \to \\ \to H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n))$$

exakt. Ist ξ so gewählt, daß $H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n)) = 0$ gilt, dann ist ι ein Epimorphismus. Das Faserbündel $(\{x_*\} \times U, \xi \mid \{x_*\} \times U, C^n)$ ist nach Satz 7 bzw. H. GRAUERT [5] komplex analytisch trivial. Ist $J(U)$ der Integritätsring der auf U holomorphen Funktionen, so ist $H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi \mid \{x_*\} \times U, C^n))$ in natürlicher Weise mit der Struktur eines $J(U)$-Moduls versehen und die Elemente $(\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn}), j = 1, \ldots, n$, bilden eine $J(U)$-Basis von $H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi \mid \{x_*\} \times U, C^n))$. Somit gibt es n Elemente aus $H^0(\Omega(X \times U, \xi, C^n))$, deren Rang für $(u_1, \ldots, u_k) \in U$ gleich n ist.

Wie man nach einiger Rechnung findet, gilt mit φ als der natürlichen Projektion von $X \times U$ auf U und dem bereits in 4. verwendeten Cozyklus η

$$H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \varphi^*(\eta) \otimes \xi, C^n)) = 0.$$

Der weitere Beweis verläuft dann ebenso wie in 4.

Damit erhalten wir schließlich

Theorem II: *Sind $U'_1, \ldots, U'_k \subset X$ paarweise fremde, zusammenhängende und einfach zusammenhängende offene Umgebungen von $x'_1, \ldots, x'_k$, $\{x', \ldots, x'_k\} \subset X'$,* *so ist das Problem* $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ *stets lösbar. Ist* X *nicht kompakt, so gibt es holomorphe Lösungen von* $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$.

Damit ist gezeigt, daß die Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von den Verzweigungspunkten analytisch abhängen.

6. Die Abhängigkeit der Lösungen von der Monodromie μ

Die im letzten Abschnitt bereitgestellten Mittel gestatten, auch die Abhängigkeit der Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von der Monodromie zu untersuchen. Wenn man von der Abhängigkeit von der Monodromie spricht, wird man folgendes im Auge haben. Man gibt sich X und X' fest vor. μ ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf einem kanonischen Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$. Nun ändert man die Werte von μ auf endlich vielen Elementen des gewählten kanonischen Erzeugendensystems ab und fragt, wie sich dabei die gegebene Lösung des Riemann-Hilbertschen Problems ändert. Wir verallgemeinern und präzisieren nun die Fragestellung. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ die Elemente eines kanonischen Erzeugendensystems von $\pi_1(X - X', x_0)$. $U_1, \ldots, U_k$ seien offene Teilmengen von $GL(n, C)$, wobei $GL(n, C)$ mit der natürlichen komplexen Struktur versehen sei. Es soll dann $\mu(\alpha_\varkappa)$ in $U_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, variieren. Dazu treffen wir vorderhand die Voraussetzung, daß $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nicht ein volles kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$ bilden. Umfaßt das Erzeugendensystem unendlich viele Elemente, so denken wir uns $\mu(\alpha_{k+1}), \ldots$ fest gegeben; andernfalls sei k so gewählt, daß $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ das Erzeugendensystem ist. Im ersten Falle ist es unmittelbar klar, daß es zu jeder Wahl von $\mu(\alpha_\varkappa) \in U_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, einen Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ gibt, der auf den $\alpha_\varkappa$ die gegebenen Werte $\mu(\alpha_\varkappa)$ annimmt; im zweiten Falle existiert ein derartiger Homomorphismus jedenfalls, wenn α_{k+1} $X - X'$ zerlegt und $\mu(\alpha_{k+1})$ geeignet gewählt wird, was außerdem noch vorausgesetzt sei. Der hierdurch definierte Homomorphismus werde mit $\mu_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ bezeichnet.

Wir bilden nun $Y := (X - X') \times U_1 \times \cdots \times U_k$ und fragen nach einer auf dem universellen Überlagerungsraum $\widetilde{Y}$ von Y meromorphen und nicht singulären Matrix $\mathfrak{Y}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Ist χ die natürliche Abbildung von Y auf $U_1 \times \cdots \times U_k$, ψ die natürliche Projektion von $\widetilde{Y}$ auf Y und für $\mu(\alpha_\varkappa) \in U_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $\varphi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ die natürliche Projektion von $\widetilde{X - X'}$ auf eine geeignete zusammenhängende Komponente $Z_{\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)}$ von $(\chi \circ \psi)^{-1}(\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k))$, so gilt für die Beschränkung $\mathfrak{Y} \mid Z_{\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)}$ von $\mathfrak{Y}$ auf $Z_{\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)}$:
für jedes $(\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)) \in U_1 \times \cdots \times U_k$ ist

$$\varphi^*_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\mathfrak{Y} \mid Z_{\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)})$$

eine Lösung von $(X, X', \mu_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k})$.
Dieses Existenzproblem werde mit $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$ bezeichnet. Wie früher sprechen wir auch hier von holomorphen Lösungen, falls $\mathfrak{Y}$ holomorph und holomorph invertierbar ist.

Es gilt das folgende

Theorem IIIa: *Enthält das kanonische Erzeugendensystem von* $\pi_1(X - X', x_0)$ *unendlich viele Elemente oder zerlegt* $\alpha_{k+1} X - X'$, *so ist* $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$ *stets lösbar, wenn nur* $U_1, \ldots, U_k$ *einfach zusammenhängende, in* $GL(n, C)$ *enthaltene Holomorphiegebiete von Homologietypus der Zelle sind. Ist* X *nicht kompakt, so gibt es holomorphe Lösungen von* $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$.

Die zum Beweis von Theorem IIIa erforderlichen Details, welche ähnlich wie beim Beweis von Theorem II durchzuführen sind, seien dem Leser überlassen. Es möge nur darauf hingewiesen werden, daß für diesen Beweis die Cozyklen ξ_μ bzw. $\xi_{\mathfrak{Y}}$ genauso wie in 2. definiert werden. Als die zur Definition erforderlichen Überdeckungen von $(X - X') \times U_1 \times \cdots \times U_k$ bzw. $X \times \times U_1 \times \cdots \times U_k$ wähle man $\{V_i \times U_1 \times \cdots \times U_k\}_{i \in I}$, falls $\{V_i\}_{i \in I}$ eine der bei der Konstruktion von ξ_μ bzw. $\xi_{\mathfrak{Y}}$ verwendete Überdeckung ist. Die in der Definition von $\xi_{\mathfrak{Y}}$ auftretenden Matrizen $\log \mu(\langle K_j D_j K_j^{-1} \rangle)$ können als in $U_1 \times \cdots \times U_k$ holomorphe Matrizen gewählt werden, da die $U_\varkappa$ einfach zusammenhängend sind.

Es bleiben also noch die beiden folgenden Fälle offen:

1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ bilden ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$

2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ bilden ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$ und α_{k+1} zerlegt, $X - X'$ nicht.

Es ist klar, daß in beiden Fällen nicht zu jeder Vorgabe $\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k) \in \in GL(n, C)$ ein Homomorphismus $\mu_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ gehört, welcher auf den $\alpha_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, die gegebenen Werte annimmt. Notwendig und hinreichend für die Existenz ist das Erfülltsein der bekannten Riemannschen Relation:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ seien genau die $X - X'$ zerlegenden Elemente des kanonischen Erzeugendensystems; dann lautet im 1. Fall die Riemannsche Relation

$$\prod_{\varkappa=1}^{h} \mu(\alpha_\varkappa) \prod_{\gamma=1}^{\frac{k-h}{2}} \left(\mu(\alpha_{h+2\gamma-1})\, \mu(\alpha_{h+2\gamma})\, \mu^{-1}(\alpha_{h+2\gamma-1})\, \mu^{-1}(\alpha_{h+2\gamma})\right) = 1\,, \tag{6}$$

falls $\alpha_{h+2\gamma-1}$ und $\alpha_{h+2\gamma}$, $\gamma = 1, \ldots, \frac{k-h}{2}$, jeweils sog. „Rückkehrschnittpaare" sind, und im 2. Falle entsprechend.

Der 2. Fall läßt sich dem 1. subsumieren, weshalb nur noch auf den ersteren eingegangen wird. Die für spezielle $U_1, \ldots, U_k$ durch Theorem IIIa erledigte Fragestellung wird man hier wie folgt formulieren:

Es sei U ein komplexer Raum (er tritt an die Stelle von $U_1 \times \cdots \times U_k$ in Theorem IIIa) und $\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)$ holomorphe Abbildungen von U in $GL(n, C)$, welche für jedes $u \in U$ die Riemannsche Relation (6) erfüllen und somit zu einem (eindeutig bestimmten) Homomorphismus μ_u von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ Anlaß geben; existiert dann auf dem universellen Überlagerungsraum $\widetilde{Y}$ von $Y := (X - X') \times U$ eine meromorphe und nicht singuläre Matrix $\mathfrak{Y}$, welche — mit den analog wie oben erklärten Bezeichnungen — die Eigenschaft besitzt:

Für jedes $u \in U$ ist $\varphi_u^*(\mathfrak{Y} \mid Z_u)$ eine Lösung von (X, X', μ_u).

Schreibt man diese Existenzfrage abkürzend mit (X, X', μ, U), so gelangt man wie oben zu

Theorem IIIb: *$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sei ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$. U sei ein holomorph vollständiger Raum vom Homologietypus der Zelle, $\mu(\alpha_1), \ldots, \mu(\alpha_k)$ seien holomorphe Abbildungen von U in $GL(n, C)$, welche für jedes $u \in U$ die Riemannsche Relation erfüllen; ferner seien geeignete Zweige von* $\log \mu(\alpha_1), \ldots, \log \mu(\alpha_h)$ *auf U eindeutig. Dann gibt es stets Lösungen von (X, X', μ, U). Ist X nicht kompakt, so existieren sogar holomorphe Lösungen von (X, X', μ, U).*

7. Eine Anwendung auf kompakte Riemannsche Flächen

X sei eine n-blättrige unbegrenzte Überlagerung von P^1. Wir bezeichnen die natürliche Projektion von X auf P^1 mit λ und die Menge der Projektionen der Verzweigungspunkte von X über P^1 mit $V = \{v_1^{(0)}, \ldots, v_k^{(0)}\}$. Ist $p_0 \in P^1 - V$ und $\{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\} = \lambda^{-1}(p_0)$, so gibt jedes $\alpha \in \pi_1(P^1 - V, p_0)$ Anlaß zu einer Permutation $\pi(\alpha)$ von $\lambda^{-1}(p_0)$ und damit zu einer Permutationsmatrix $\mu(\alpha)$: α läßt sich in jeden Punkt von $\lambda^{-1}(p_0)$ hochdrücken; der nach $x_\nu^{(0)}$ hochgedrückte Weg endet dann in $x_{\pi(\nu)}^{(0)}$ und es ist $\mu(\alpha) = (\alpha_{\varrho\sigma})_{1 \leqq \varrho, \sigma \leqq n}$ mit $a_{\varrho\sigma} := \delta_{\pi(\varrho), \sigma}$ zu setzen. $\alpha \to \mu(\alpha)$ ist eine Darstellung von $\pi_1(P^1 - V, p_0)$ vom Grade n; sie charakterisiert nach einem klassischen Satz der Topologie X bis auf spurpunkttreue Automorphismen (d. h. bis auf Umnumerierung der Blätter). Die Elemente ein und derselben Spalte einer Lösung $\mathfrak{Y}$ von (P^1, V, μ) können als die Zweige einer auf X meromorphen Funktion interpretiert werden: die Komponenten einer solchen Spalte vertauschen sich bei Umlaufen eines Verzweigungspunktes in der durch die Verzweigung von X über P^1 vorgeschriebenen Weise, und sie verhalten sich in diesen Punkten bestimmt, d. h. sie besitzen in der lokalen Uniformisierenden höchstens einen Pol als Singularität. Nimmt man alle durch die Spalten von $\mathfrak{Y}$ definierten Funktionen $y_1, \ldots, y_n$, so erhält man ersichtlich eine Basis von $K(X)$ über $K(P^1)$.

Nun seien die $U_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, zusammenhängende, einfach zusammenhängende und paarweise fremde offene Umgebungen von $x_\varkappa$. Ist $(v_1, \ldots, v_\varkappa) \in U_1 \times \cdots \times U_k$, so hat man einen natürlichen Isomorphismus $\varphi_{v_1, \ldots, v_k}$ von $\pi_1(P^1 - \{v_1, \ldots, v_k\}, p_0)$ auf $\pi_1(P^1 - \{v_1^{(0)}, \ldots, v_k^{(0)}\}, p_0)$. Nach einem klassischen Resultat gehört zur Darstellung $\mu \circ \varphi_{v_1, \ldots, v_k}$ eine n-blättrige unbegrenzte Überlagerung $X_{v_1, \ldots, v_k}$ von P^1, welche nach dem oben angegebenen Verfahren eben zu dieser Darstellung Anlaß gibt. $X_{v_1, \ldots, v_k}$ entsteht aus $X_{v_1^{(0)}, \ldots, v_k^{(0)}}$ durch „Verschieben" der Verzweigungspunkte. Theorem II lehrt, daß die y_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, analytisch von den $v_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, abhängen und für jedes feste $(v_1, \ldots, v_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$ eine Basis von $K(X_{v_1, \ldots, v_k})$ über $K(P^1)$ bilden. Die Menge

$$T := \{X_{v_1, \ldots, v_k} : (v_1, \ldots, v_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k)\}$$

läßt sich in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen; T kann damit im Sinne von O. TEICHMÜLLER [25] als „analytische Schar von

Riemannschen Flächen" mit $U_1 \times \cdots \times U_k$ als „Parametermannigfaltigkeit" aufgefaßt werden. Es zeigt sich, daß die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ auf T meromorph sind.

Satz 9: *Es gibt n auf T meromorphe Funktionen, welche für jedes feste $(v_1, \ldots, v_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$ eine Basis von $K(X_{v_1, \ldots, v_k})$ über $K(P^1)$ bilden.*

Literatur

[1] BEHNKE, H., K. STEIN: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1949). — [1a] BEHNKE, H., K. STEIN: Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Canadian J. Math. **2**, 152—165 (1950). — [2] BIRKHOFF, G. D.: The generalized Riemann problem for linear differential equations.... Amer. Acad. Proc. **49**, 521—568 (1913); Amer. Math. Soc. Bull (2) **19**, 508—509 (1913). — [3] BIRKHOFF, G. D.: Infinite products of analytic matrices. Amer. Math. Soc. Trans. **17**, 386—404 (1916). — [4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. (J. de Math. **19**, 1—26 (1940)). Vgl. auch J. FRENKEL: Un théorème sur les matrices holomorphes inversibles. Sem. H. Cartan **1951/52**, XVII, 1—10. — [5] GRAUERT, H.: Généralisation d'un théorème de Runge et application á la théorie des espaces fibres analytiques. C. R. Acad. Sci. 1956. — [6] HAUPT, O.: Zur Theorie der Prymschen Funktionen erster und N-ter Ordnung. Math. Ann. **77**, 24—64 (1915). — [7] HAUPT, O.: Über eine dem sog. Riemannschen Problem entsprechende Randwertaufgabe. Heidelb. Akad. Sitzgsber. **16**, 5—41 (1920). — [8] HAUPT, O.: Zur Parametrixmethode. Math. Ann. 88, 136—150 (1922). — [9] HILBERT, D.: Mathematische Probleme. Gött. Nachr. **9100**, 253—297. — [10] HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Dritte Mitt.). Gött. Nachr. **1905**, 307—338. — [11] HILBERT, D.: Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verh. 3. internat. Math.-Kongr. Heidelberg **1904**, 233—240. — [12] KELLOG, O.: Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann. Math. Ann. **60**, 424—433 (1903). — [13] KODAIRA, K., and D. C. SPENCER: Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, 872—877 (1953). — [14] LAPPO-DANILEVSKY, J. A.: Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Chelsea Publ. Comp. 1953. — [15] MUSKHELISHVILI, N. I.: Singular integral equations. Noordhoff 1953. — [16] NAKANO, S.: On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan **7**, 1—12 (1955). — [17] PLEMELJ, J.: Riemannsche Formenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Mh. Math. **1908**, 211—246. — [18] PLEMELJ, J.: Über Schlesingers „Beweis" der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Dtsch. Math.-Ver. 18, 15—20; 340—343 (1909). — [19] POINCARÉ, H.: Mémoire sur les fonctions zetafuchsiennes. Acta math. **5**, 209—278 (1884). — [20] RIEMANN, B.: Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. Math. Werke, S. 62—78. — [21] RIEMANN, B.: Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Koefficienten. Math. Werke, S. 357—369. — [22] RÖHRL, H.: Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler. Arch. d. Math. **4**, 298—307 (1953). — [23] SCHLESINGER, L.: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem (III). J. f. Math. **130**, 26—46 (1905). — [24] SCHLESINGER, L.: Bemerkungen zu dem Kontinuitätsbeweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Math. Ann. **63**, 273—276 (1906). — [25] TEICHMÜLLER, O.: Veränderliche Riemannsche Flächen. Dtsch. Math. **7**, 344—359 (1944). — [26] TIETZ, H.: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. d. Math. **4**, 31—38 (1953).

(Eingegangen am 9. September 1956)